ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale
et de la Jeunesse

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs

Session 2003

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Concours **BCPST**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *autorisé*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours BCPST, comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est autorisé .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

PREMIER PROBLÈME

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = ln(2 - e^{\frac{-1}{x}}).$$

1. Préciser le domaine de définition de f et montrer que f est de classe C^∞ sur ce domaine.
2. Montrer que f peut se prolonger en une fonction, que l'on notera encore f, continue et dérivable à droite en 0.
3. Étudier les variation de f et préciser ses limites aux bornes de son domaine noté D_f.
4. (a) Étudier le signe de l'application $g : x \longrightarrow \frac{2x-1}{x} e^{\frac{1}{x}} - 1$; on montrera, en particulier, qu'il existe $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
   (b) Calculer $f''(x)$, pour tout $x \in D_f$, et étudier la concavité de f.
5. On cherche à présent une valeur approchée de α par la méthode dite de NEWTON ; cette méthode, appliquée en x_1, consiste à prendre comme valeur approchée de α le réel

$$x_2 = x_1 - \frac{g(x_1)}{g'(x_1)}.$$

   (a) Donner une valeur approchée α_1 de α en appliquant la méthode de NEWTON en $\frac{1}{2}$.(On étudiera d'abord la convexité de g en calculant g'). Faire un croquis.
   (b) Donner une valeur approchée α_2 de α en appliquant la même méthode en α_1.
   (c) Vérifier que $\alpha \in I =]0.5, 0.6[$ et que $|\frac{1}{g'}| \leqslant \frac{1}{9.8}$ sur I.
   (d) En remarquant que $g(\alpha_2) = g(\alpha_2) - g(\alpha)$, en déduire que $|\alpha_2 - \alpha| < 10^{-3}$.
6. Dans les calculs et graphes qui suivent, on prendra α_2, $f(\alpha_2)$ et $f'(\alpha_2)$ comme valeurs approchées de α, $f(\alpha)$ et $f'(\alpha)$ respectivement.
   Tracer le graphe de f avec soin.
7. On cherche à résoudre l'équation $(E) : f(x) = x$.
   (a) Montrer que (E) possède exactement deux solutions a et b avec $a > 0$ et $b < 0$.
   (b) Montrer que la suite $(w_n)_n$ définie par $w_0 = 0.5$ et $w_{n+1} = f(w_n)$ converge vers a et déterminer un réel $k \in]0, 1[$ tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ |w_{n+1} - w_n| \leqslant k^n |w_1 - w_0|\ ;$$

   en déduire un encadrement d'amplitude $\leqslant 10^{-2}$ de a par deux termes de la suite.
   (c) Peut-on utiliser une méthode analogue pour approcher b.

8. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par

$$u_n = \prod_{k=2}^{n} (2 - e^{\frac{1}{k}}),$$

et on pose $v_n = f(-n),\ n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Exprimer $ln(u_n)$ en fonction des termes de la suite $(v_n)_n$.

(b) Montrer qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $v_n < \frac{-1}{2n}$ dès que $n \geqslant N_1$. (On pourra utiliser un développement limité)

(c) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leqslant ln(k+1) - ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$.

(d) En déduire que la suite $\left(\sum_{k=2}^{n} v_k\right)_n$ tend vers $-\infty$.

(e) Déduire de ce qui précède que la suite $(u_n)_n$ est convergente et trouver sa limite.

DEUXIÈME PROBLÈME

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On notera p_k la probabilité de l'événement "$X = k$" :

$$p_k = P(X = k).$$

On appelle fonction génératrice f de X la fonction somme de la série entière

$$\sum_{k \geqslant 0} p_k x^k.$$

1ème Partie

1. Calculer la fonction génératrice de la variable aléatoire X dans chacun des cas suivants en précisant à chaque fois le domaine de définition.

(a) X est une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n, p.

(b) X est variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ notée $\mathcal{P}(\lambda)$.

(c) X est variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p notée $\mathcal{G}(p)$.

2. Montrer que la série $\sum_{k \geqslant 0} p_k x^k$ converge pour tout $x \in [-1, 1]$. Que vaut $f(1)$?

3. On pose $q_k = P(X > k),\ k \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que la série $\sum_{k \geqslant 0} q_k x^k$ converge pour tout $x \in]-1, 1[$.

(b) Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$g(x)(1 - x) = 1 - f(x),$$

où

$$g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} q_k x^k.$$

4. (a) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$; on pose $Z = X + Y$ et on note f (resp. g, h) la fonction génératrice de X (resp. Y, Z).
Montrer que, pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$f(x)g(x) = h(x).$$

   (b) Retrouver ainsi la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n,\ p$.

   (c) Montrer que si X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres λ et μ, alors leur somme Z suit aussi une loi de Poisson. Quel est son paramètre ?

2ème Partie

1. Une fourmi pond un nombre aléatoire N d'œufs. Soit f la fonction génératrice de la variable aléatoire N. On suppose que ses descendants se produisent de façon indépendante et suivant la même loi ; on appelle X_n la variable aléatoire représentant la population de fourmis nées à la n-ième génération.

   (a) Exprimer la probabilité $p_{i,j} = P(X_{n+1} = j/X_n = i)$ à l'aide de la fonction f .

   (b) Calculer cette probabilité lorsque N suit une loi de Poisson de paramètre λ.

2. On répète de façon indépendantes des expériences de Bernouilli de paramètre p. On s'intéresse à la loi X_k donnant le nombre d'échecs avant le k-ième succès ; on note Y_j la loi donnant le nombre d'échecs entre les $j-1$ et j-ième succès.

   (a) Quelle est la loi suivie par Y ?

   (b) Exprimer X_k en fonction des Y_j.

   (c) Montrer que $P(X = r) = C^r_{k+r-1} p^k q^r$.

FIN DE L'ÉPREUVE